Universidad del Norte

División de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas

Un problema parabólico en una región cilíndrica no acotada

Ruben Serna Gómez

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Matemáticas

Directores: Dr. rer. nat. Bienvenido Barraza Martínez
Dr. rer. nat. Jairo Hernández Monzón

Barranquilla, agosto de 2012

Agradecimientos

Primero que todo darle gracias a Dios por haberme dejado vivir este momento, el cual es muy especial para mi y mi familia. A mis amigos Rogelio Grau y Darwin Villar por su amistad y colaboración incondicional en todo este proyecto. A mis tutores Bienvenido Barraza y Jairo Hernández, ya que fueron ellos los gestores de este proyecto y por su colaboración incondicional conmigo.
También quiero agradecer a todas aquellas personas que hicieron realidad este gran momento.
Finalmente quiero darle mis más sinceros agradecimientos a mis padres y mi familia, en especial a mi esposa Claudia Cuentas y mis hijos Maria Clara serna y Ruben Dario Serna, por su paciencia, amor y apoyo durante el desarrolo de la maestría.
Hermanita aunque no estés presente físicamente con nosotros, yo se que siempre estarás presente en cada instante de nuestras vidas.
Vuela, vuela como mariposa, niña hermosa.
Dejate llevar por la brisa que va sin prisa.
Extiende tus alas al sentir el aire,
no te detengas ante nada en tu último viaje.
Princesa adorada.

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo establecer resultados de existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial con condiciones de frontera

$$
(P)_{f,g,h,u_0}\begin{cases}
u_t(t,x,y)-\Delta_x u(t,x,y)+\mathcal{A}(y,\partial_y)u(t,x,y)=f(t,x,y),\\
\qquad\qquad (t,x,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\Omega,\\
u(t,x,\cdot) \;=\; g(t,x,\cdot),\\
\qquad\qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\ \text{sobre } \partial\Omega,\\
\frac{\partial u}{\partial n}(t,x,\cdot) \;=\; h(t,x,\cdot),\\
\qquad\qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\ \text{sobre } \partial\Omega,\\
u(0,x,y) \;=\; u_0(x,y),\\
\qquad\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^n\times\Omega,
\end{cases}
$$

usando la teoría de operadores pseudodiferenciales y su generación de semigrupos analíticos sobre adecuados espacios de Besov. Allí Ω es un abierto de $\mathbb{R}^m$ con frontera suave $\partial\Omega$.

$$\mathcal{A}(y,\partial_y)u := \mathrm{div}_y[\Lambda(y)\nabla_y u + b(y)u] + (c(y)\cdot\nabla_y u) + d(y)u,$$

es un operador diferencial de segundo orden con $\Lambda:\Omega\to\mathbb{R}^{m\times m}$, $b:\Omega\to\mathbb{R}^m$, $c:\Omega\to\mathbb{R}^m$ y $d:\Omega\to\mathbb{R}$ funciones suaves y Λ uniformemente elíptico en Ω.

Las ecuaciones diferenciales de evolución aparecen de manera natural en la modelación de fenómenos dinámicos en la naturaleza, en nuestro caso $(P)_{f,g,h,u_0}$ es un problema de evolución parabólico que se usa para modelar la difusión del calor en una región cilíndrica no acotada.

El problema $(P)_{f,g,h,u_0}$ es una simplificación leve del problema investigado por P. Guidotti en [7], Theorem 3.2. Dado que la prueba de dicho teorema, presentada allí, consiste solamente en la citación de dos resultados (uno que no aplica por error al cruzar la referencia y el otro que no se encuentra en dicho artículo), pretendemos con este trabajo establecer en forma detallada resultados de existencia y unicidad de soluciones del problema $(P)_{f,g,h,u_0}$ usando las herramientas o técnicas empleadas en [7], que es la teoría de operadores pseudodiferenciales, la generación de semigrupos analíticos y la teoría abstracta de problemas de Cauchy presente en [3]. Es importante resaltar que la metodología desarrollada en este trabajo para estudiar el problema $(P)_{f,g,h,u_0}$ funciona también para operadores uniformemente elípticos más generales que el $\mathcal{A}(y, \partial_y)$ descrito arriba, de allí que la elaboración detallada de los resultados de esta Tesis daran luz para resolver otros problemas de Cauchy parabólicos sobre regiones cilíndricas no acotadas.

A continuación indicaremos como se encuentra organizado este trabajo. En el primer capítulo se inicia con los preliminares matemáticos necesarios para el desarrollo de este trabajo, en particular, presentamos las definiciones de los espacios funcionales, los conceptos de semigrupos, generador infinitesimal de un semigrupo, semigrupo fuertemente continuo, semigrupo analítico y se prueba que

$$\partial^\alpha(a^{-1}) = \pm \sum_{p=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{N}_0^n \setminus 0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_p=\alpha}} a^{-1}(\partial^{\alpha_1} a)a^{-1} \ldots (\partial^{\alpha_p} a)a^{-1}$$

para funciones $a : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}_{is}(E, F)$ diferenciables. Allí E, F son espacios de Banach arbitrarios y $\mathcal{L}_{is}(E, F)$ es el espacio de las aplicaciones lineales, continuas y biyectivas de E sobre F. Este resultado será usado en el tercer capítulo. En el segundo capítulo se definen el espacio de símbolos vector valuados $S^m(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E, F))$, el concepto de operador pseudodiferencial y enunciamos el Teorema 2.2.3 que será de gran utilidad (junto con el Lema 1.1.25) para probar el Teorema 3.1.1. En el último capítulo, el tres, empieza con la prueba del Teorema 3.1.1, el cual establece que si $A \in H(E_1, E_0)$ (es decir, $-A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico y fuertemente continuo sobre E_0 y si $a_\lambda(\xi) := (\lambda + |\xi|^2 + A)^{-1}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ adecuado, entonces su operador pseudodiferencial asociado $a_\lambda(D) = (\lambda - \Delta + A)^{-1}$ es un operador lineal, continuo y biyectivo de $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, E_0)$ en $\mathcal{B}^{s+2}_{p,q}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, E_1)$, siendo $\mathcal{B} \in \{B, b\}$, $s \in \mathbb{R}$ y $p,q \in [1, \infty]$. Los espacios $\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, E)$, familiares de los espacios de Besov, son definidos en el capítulo 1. Luego se demuestra en el Teorema 3.1.2 que si $A \in H(E_1, E_0)$, entonces

$$-\Delta + A \in H(buc^{s+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap buc^s(\mathbb{R}^n, E_1), buc^s(\mathbb{R}^n, E_0)), \qquad (1)$$

para cualquier $s \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \mathbb{N}$, donde $buc^s := b^s_{\infty,\infty}$ para $s \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \mathbb{N}$. Finalmente mostramos en el Teorema 3.2.1 que si J denota el intervalo cerrado $[0, T]$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado con frontera suave $\partial\Omega$, $s \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \mathbb{N}$, $\rho \in (0, 1)$ y si

$$f \in C^\rho(J, buc^s(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega))),$$

$$\begin{aligned}(g, h) \in\ & C^{1+\rho}(J, buc^s(\mathbb{R}^n, W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega))) \\ & \cap \quad C^\rho(J, buc^{s+2}(\mathbb{R}^n, W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)))\end{aligned}$$

y

$$u_0 \in buc^s(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega)),$$

entonces existe una única solución

$$\begin{aligned}u \in\ & C^\rho(J \setminus \{0\}, buc^{s+2}(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega)) \cap buc^s(\mathbb{R}^n, W_p^2(\Omega))) \\ & \cap\ C^{\rho+1}(J \setminus \{0\}, buc^s(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega)))\end{aligned}$$

del problema $(P)_{f,g,h,u_0}$. Allí los espacios $L^p(\Omega)$, $W_p^2(\Omega)$ y $W_p^s(\partial\Omega))$ son los definidos en forma estandar en la literatura (ver por ejemplo el capítulo 1 de este trabajo, [1] o [8]).

Índice general

Capítulo 1

Preliminares matemáticos

En este capítulo damos las definiciones y notaciones que serán utilizadas a lo largo de éste, también algunos resultados importantes de los espacios de funciones aquí mencionados y una breve introducción a la teoría de semigrupos analíticos. En este trabajo $\emptyset$ denota el conjunto vacío, $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{C}$ el de los complejos, $\mathbb{R}^n$ denotará el espacio euclidiano n dimensional, $|x| := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$, $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$, F, E, E_i, i=0,1 espacios de Banach con normas $\|.\|_F, \|.\|_E, \|.\|_{E_i}$, respectivamente, $E^* := E \setminus \{0_E\}$ y 0_E el cero del espacio E. Todos los espacios de Banach aquí considerados son sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Se dice que E_1 está continuamente inmerso en E_0, si E_1 es un subespacio lineal de E_0 y de la convergencia en E_1 siempre se sigue la convergencia en E_0. En este caso se escribe $E_1 \hookrightarrow E_0$. Si además E_1 es denso en E_0, se escribe $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$. Es importante resaltar que las pruebas de los Lemas 1.1.21 y 1.1.29 se encuentran en la literatura, pero por comodidad del lector las desarrollaremos en este capítulo.

1.0.1 Definición. (Multiíndices) Un multiíndice es una n-tupla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de enteros no negativos. Esto es, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ con $i = 1, 2, \ldots, n$. Escribiremos $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ para indicar que α es un multiíndice con n componentes.
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces se define:

a) $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

b) $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$.

c) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i \;\; \forall i = 1, 2, \dots, n$.

d) $\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$.

e) $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ si $\beta \leq \alpha$, $\binom{\alpha}{\beta} = 0$ en otro caso.

f) $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

g) Para $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$:

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \;\; \text{donde } \partial_i^{\alpha_i} = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}, \;\; 1 \leq i \leq n.$$

Para $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se define además el operador diferencial

$$D^\alpha := (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha.$$

1.1. Espacios de funciones

1.1.1 Definición. (Los espacios $C^k(\Omega, E)$) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $k \in \mathbb{N}_0$. Denotamos con $C^k(\Omega, E)$ el espacio de todas las funciones $f : \Omega \to E$, con derivadas parciales continuas en Ω hasta el orden k. $C^\infty(\Omega, E)$ denotará el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con continuidad sobre Ω.
Ahora, si $\theta \in (0, 1)$ se define el **espacio de las funciones Hölder-continuas** de orden θ por

$$C^\theta(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{C} \text{ continuas} : \|u\|_{C^\theta(\Omega)} < \infty\}$$

donde

$$\|u\|_{C^\theta(\Omega)} := \|u\|_{\infty,\Omega} + [u]_\theta \;,\;\; \|u\|_{\infty,\Omega} := \sup_{x \in \;\Omega} |u(x)|$$

y

$$[u]_\theta := \sup_{x,y \in \;\Omega, \; x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\theta}.$$

1.1.2 Definición. Consideremos $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ y $[s] := \text{máx}\{k \in \mathbb{N}_0 : k < s\}$. Entonces definimos los espacios de funciones:

$$C_b^k(\mathbb{R}^n, E) := \{u \in C^k(\mathbb{R}^n, E) : \|u\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n,E)} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha u\|_E < \infty\},$$

$BUC^k(\mathbb{R}^n, E) := \{u \in C_b^k(\mathbb{R}^n, E) : \partial^\alpha u$ es uniformemente continua $\forall\, |\alpha| \leq k\}$,

$C_b^s(\mathbb{R}^n, E) := \{u \in C_b^{[s]}(\mathbb{R}^n, E) : \partial^\alpha u \in C^{s-[s]}(\mathbb{R}^n, E)\ \forall\ |\alpha| = [s]\}$,

$BUC^s(\mathbb{R}^n, E) := \{u \in BUC^{[s]}(\mathbb{R}^n, E) : \partial^\alpha u \in C^{s-[s]}(\mathbb{R}^n, E)\ \forall\ |\alpha| = [s]\ \}$.

1.1.3 Definición. (El espacio $C_c^k(\Omega, E)$) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, para $k \in \mathbb{N}_0$, $C_c^k(\Omega, E)$, denota el conjunto formado por todas las funciones $u \in C^k(\Omega, E)$ tales que el soporte de u, simbolizado $supp(u)$, es compacto, donde

$$supp(u) := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0_E\}}.$$

1.1.4 Definición. (Espacio de las funciones rapidamente decrecientes) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ es el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to E$ tales que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, E)$, y $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $\forall\ k \in \mathbb{N}_0$
se tiene que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^k \|\partial^\alpha f(x)\|_E < \infty.$$

En $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ se introduce la familia de seminormas

$$\{|\cdot|_k :\ k \in \mathbb{N}_0\},$$

donde

$$|f|_k := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} \langle x \rangle^k \|\partial^\alpha f(x)\|_E.$$

Esta sucesión de seminormas induce una métrica invariante bajo traslaciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ definida por:

$$d(f, g) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|f - g|_k}{1 + |f - g|_k} \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E).$$

$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E), \{|\cdot|_k :\ k \in \mathbb{N}_0\})$ es un espacio topológico de Frechet, es decir el espacio métrico $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E), d)$ es completo. Véase [10].

1.1.5 Definición. (Espacio de las distribuciones temperadas) El espacio de las distribuciones temperadas E vector valuadas se define como

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E) := \{\Lambda : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to E \mid \Lambda \text{ es lineal y continuo}\}.$$

1.1.6 Definición. (El espacio $L^p(\mathbb{R}^n, E)$) Para $1 \leq p \leq \infty$ se define el espacio $L^p(\mathbb{R}^n, E)$ como el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to E$ tales que f es fuertemente medible y

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,E)} < \infty,$$

donde

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,E)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,E)} := \text{ínf}\{\lambda : \lambda \text{ es cota esencial de } \|f(x)\|_E\}.$$

Decimos que λ es cota esencial del conjunto $\{\|f(x)\|_E,\ x \in \mathbb{R}^n\}$
si $\|f(x)\|_E \leq \lambda$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.
En forma similar se define el espacio $l_p(\mathbb{N}_0^n, E)$ considerando $\mathbb{N}_0^n$ con la medida cardinal.

1.1.7 Definición. (El espacio $W_p^k(\Omega, E)$) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto , $k \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio $W_p^k(\Omega, E)$ como el espacio de todas las funciones $u \in L^p(\Omega, E)$ tales que las derivadas distribucionales $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega, E)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$.

1.1.8 Definición. (El espacio $W_p^s(\mathbb{R}^n, E)$)
Consideremos $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ y $[s] = \text{máx}\{k \in \mathbb{N}_0 : k < s\}$. Entonces definimos el espacio $W_p^s(\mathbb{R}^n, E)$ de la siguiente manera:

$$W_p^s(\mathbb{R}^n, E) := \{u \in W_p^{[s]}(\mathbb{R}^n, E) : \|u\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n,E)} < \infty\}, \text{ donde}$$

$$\|u\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n,E)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq [s]} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n,E)}^p + \sum_{|\alpha|=[s]} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)\|_E^p}{|x-y|^{n+(s-[s])p}} \, d(x,y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.9 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, conexo y acotado. Decimos que la frontera $\partial\Omega$ de Ω es de clase C^m, $m \in \mathbb{N}$, si para cada $x \in \partial\Omega$ existe una vecindad abierta U de x y un difeomorfismo ϕ de clase C^m de U sobre el n-cubo unitario

$$Q := \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_j| < 1 \ , \ j = 1, ..., n\},$$

tal que

$$\phi(U \cap \Omega) = Q^+ := \{y = (y_1, ..., y_n) \in Q : y_n > 0\},$$

$$\phi(U \cap \partial\Omega) = Q_0 := \{y = (y_1, ..., y_n) \in Q : y_n = 0\}$$

y
$$\phi(U \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})) = Q^- := \{y = (y_1, ..., y_n) \in Q : y_n < 0\}.$$

Si $\partial\Omega$ es de clase C^m para todo $m \in \mathbb{N}$, escribimos $\partial\Omega \in C^\infty$ y decimos simplemente que $\partial\Omega$ es suave.
Decimos que $\phi : U \to Q$ es un difeomorfismo de clase C^m, si ϕ es una biyeción de U sobre Q, $\phi \in C^m(\overline{U})$, $\phi^{-1} \in C^m(\overline{Q})$ y existen constantes positivas c_1 *y* c_2 tales que $c_1 \leq |\det D\phi(x)| \leq c_2$ para todo $x \in U$, donde $D\phi$ es la matriz jacobiana de ϕ.

1.1.10 Lema. Sea $\{\Omega_k\}_{k=1,...,N}$ una cubierta abierta finita de un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, esto es , $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k$. Entonces, existen funciones reales ψ_k, $k = 1, ..., N$, tales que $\psi_k \in C_c^\infty(\Omega_k)$,
$0 \leq \psi_k \leq 1$ y $\sum_{k=1}^{N} \psi_k = 1$ en K.
La familia $\{\psi_k\}_{k=1,...,N}$, se denomina *partición de la unidad en K, subordinada a la cubierta $\{\Omega_k\}_{k=1,...,N}$*.

Demostración. Lema 5.13 de [6]. □

1.1.11 Observación. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, conexo, acotado y con frontera suave $\partial\Omega$.
Para cada $x \in \partial\Omega$ existe una vecindad abierta U_x de x y un difeomorfismo de clase C^∞ $\phi_x : U_x \to Q$ que cumple las propiedades dadas en la Definición 1.1.9.
Dado que $\partial\Omega$ es un conjunto compacto, existen $x_1, ..., x_N \in \partial\Omega$ tales que $\partial\Omega \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} U_k$, donde $U_k := U_{x_k}$. Respectivamente, sea $\phi_k := \phi_{x_k}$, $k = 1, ..., N$.
Sea además $\{\psi_k\}_{k=1,...,N}$ una partición de la unidad en $\partial\Omega$ subordinada a la cubierta abierta $\{U_k\}_{k=1,...,N}$ (véase Lema 1.1.10).
Decimos que la familia de ternas $\{(U_k, \phi_k, \psi_k)\}_{k=1,...,N}$ es una localización de $\partial\Omega$.

1.1.12 Definición. (El espacio $W_p^s(\partial\Omega)$)
Sean $s \in \mathbb{R}^+$, $1 \leq p \leq \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y con frontera suave $\partial\Omega$. Sea $\{(U_k, \phi_k, \psi_k)\}_{k=1,...,N}$ una localización de $\partial\Omega$. Decimos que una función $u : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ pertenece al espacio $W_p^s(\partial\Omega)$, si para cada $k = 1, ..., N$, $u_k := (\psi_k u) \circ \phi_k^{-1}|_{Q_0} \in \mathring{W}_p^s(Q_0) := \overline{C_c^\infty(Q_0)}^{W_p^s(Q_0)}$.

La norma de u en $W_p^s(\partial\Omega)$ se define mediante

$$\|u\|_{s,p,\partial\Omega} := \sum_{k=1}^{N} \|u_k\|_{W_p^s(Q_0)}.$$

1.1.13 Nota. Distintas localizaciones de $\partial\Omega$ dan origen al mismo espacio $W_p^s(\partial\Omega)$ con normas equivalentes.

1.1.14 Teorema. (teorema de la traza) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado con frontera suave $\partial\Omega$. Entonces, el operador

$$\begin{aligned} \gamma_\partial : C^2(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C(\partial\Omega) \times C(\partial\Omega) \\ u \ \ &\mapsto \ \ \gamma_\partial(u) := \Big(u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} \Big) \end{aligned}$$

posee una única extensión a un operador lineal, continuo y sobreyectivo

$$\begin{aligned} \gamma_\partial : W_p^2(\Omega) &\longrightarrow W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \\ u \ \ &\mapsto \ \ \gamma_\partial(u) := (\gamma_0 u, \gamma_1 u). \end{aligned}$$

$\gamma_0 u$ y $\gamma_1 u$ se denominan trazas de orden cero y orden uno de u, respectivamente.

Demostración. Teorema 1.5.1.2 de [8]. □

1.1.15 Definición. (Transformada de Fourier) Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n, E)$ se define la transformada de Fourier de f como la función dada por :

$$\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\ dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donde $x \cdot \xi$ es el producto interno usual de dos vectores en $\mathbb{R}^n$.
Además definimos $\check{f} := [\ \hat{f}\ ](-\cdot)$ como la transformada inversa de Fourier de f.

1.1.16 Definición. (Resolución de la unidad) Una sucesión $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se denomina una resolución de la unidad, si ella satisface las siguientes propiedades

a) $supp(\psi_0) \subseteq \Omega_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2\}$,
$supp(\psi_j) \subseteq \Omega_j := \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1},\ \forall j \in \mathbb{N}\}$.

b) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \psi_j(\xi) = 1 \ , \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

c) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existe una constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$|D_\xi^\alpha \psi_j(\xi)| \leq C_\alpha 2^{-j|\alpha|} 1_{\Omega_j}(\xi) \ , \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ y \ \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Por 1_Ω se entenderá la función característica de un conjunto Ω.

1.1.17 Definición. (Espacios de Besov) Sea $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ una resolución de la unidad. Para $m \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$ y $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ definamos :

$$B_{p,q}^m(\mathbb{R}^n, E) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E) : \|u\|_{B_{p,q}^m} < \infty\},$$

$$b_{p,q}^m(\mathbb{R}^n, E) := \overline{\{B_{p,q}^{m+1}(\mathbb{R}^n, E) : \|.\|_{B_{p,q}^m}\}}^{\ B_{p,q}^m},$$

$$buc^s(\mathbb{R}^n, E) := b_{\infty,\infty}^s(\mathbb{R}^n, E),$$

donde $\|u\|_{B_{p,q}^m} := \|2^{js}\|\psi_j(D)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n,E)}\|_{l_q}$ y $\psi_j(D)u := [\psi_j \hat{u}]^\vee$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, E)$ (comparar con Definición 2.2.1). Los espacios $B_{p,q}^t(\mathbb{R}^n, E)$ y $b_{p,q}^t(\mathbb{R}^n, E)$ se denominan espacios de Besov (no homogéneos) y espacios de Besov pequeños, de orden t y parámetros p y q, respectivamente.

1.1.18 Definición. (El espacio de las aplicaciones lineales continuas) Sean E_1 y E_0 espacios de Banach con normas $||\cdot||_{E_1}$ y $||\cdot||_{E_0}$ respectivamente. Con $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ denotaremos el espacio de las aplicaciones lineales continuas con dominio E_1 e imágenes en E_0 , y $\mathcal{L}(E_0) := \mathcal{L}(E_0, E_0)$. $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ está dotado de la norma operador

$$||T||_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} = \sup\{||T(x)||_{E_0} \ : \ x \in E_1 \ y \ ||x||_{E_1} = 1\}.$$

Con base en lo anterior, definimos $\mathcal{L}_{is}(E_1, E_0)$ como el conjunto de todos los $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ con A biyectivo.

1.1.19 Observación.
Si $A \in \mathcal{L}_{is}(E_1, E_0)$, el teorema de la aplicación abierta implica que $A^{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$.
Para $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ definimos el conjunto resolvente de A por

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda - A \in \mathcal{L}(E_1, E_0) \text{ es biyectivo}\}.$$

Aquí $\lambda - A$ abrevia la notación $\lambda Id_{E_1} - A$, donde Id_{E_1} denota la aplicación idéntica en E_1.

En particular, si $E_1 \hookrightarrow E_0$ y $\lambda \in \rho(-A)$ con $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$, tiene sentido considerar $(\lambda + A)^{-1}$ en $\mathcal{L}(E_0)$.

1.1.20 Teorema. (Teorema de perturbación) Sea $A \in \mathcal{L}_{is}(E_1, E_0)$ y $B \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ con

$$\|A - B\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} < \frac{1}{\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)}}.$$

Entonces B es biyectivo y $B^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (A^{-1}(A-B))^k A^{-1}$.

Demostración. Lema 8.3 de [6]. $\square$

1.1.21 Lema. Sean E y F espacios de Banach y

$$\begin{aligned} f : \mathcal{L}_{is}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{L}_{is}(F,E) \\ A \quad &\mapsto \quad f(A) = A^{-1}. \end{aligned}$$

Entonces f es diferenciable con $f'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$, para todo $B \in \mathcal{L}_{is}(E,F)$ y $A \in \mathcal{L}_{is}(E,F)$.

Demostración. Mostremos primero que $\mathcal{L}_{is}(E,F)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{L}(E,F)$.
Sea $A \in \mathcal{L}_{is}(E,F)$ cualquiera pero fijo y definimos $r := \|A^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(F,E)}$. Probemos que el conjunto $B_r(A) := \{H \in \mathcal{L}(E,F) : \|H - A\|_{\mathcal{L}(E,F)} < r\}$ está contenido en $\mathcal{L}_{is}(E,F)$. En efecto, sea $Z \in B_r(A)$, entonces
$Z \in \mathcal{L}(E,F)$ y $\|Z - A\|_{\mathcal{L}(E,F)} < r$, ahora aplicando el Teorema 1.1.20, se tiene que $Z \in \mathcal{L}_{is}(E,F)$, luego como Z es arbitrario, se sigue que
$B_r(A) \subset \mathcal{L}_{is}(E,F)$. Es decir, $\mathcal{L}_{is}(E,F)$ es abierto en $\mathcal{L}(E,F)$.
Probemos ahora que $\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} \longrightarrow 0$, cuando $H \longrightarrow 0_{\mathcal{L}_{is}(E,F)}$, donde
$R(H) := f(A+H) - f(A) - f'(A)(H)$ con $A,H \in \mathcal{L}_{is}(E,F)$, $H \neq 0_{\mathcal{L}_{is}(E,F)}$
y $f'(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}$.
En efecto, sea A, $H \in \mathcal{L}_{is}(E,F)$ y $H \neq 0_{\mathcal{L}_{is}(E,F)}$, entonces existe $r > 0$ tal que $A + H \in \mathcal{L}_{is}(E,F)$ $\forall \|H\| < r$, ya que $\mathcal{L}_{is}(E,F)$ es abierto. Luego tiene sentido hablar de A^{-1}, H^{-1} y $(A+H)^{-1}$. Note que

$$R(H) = f(A+H) - f(A) - f'(A)(H) = (A+H)^{-1} - A^{-1} - (-A^{-1}HA^{-1})$$

si y sólo si

$$R(H)(A+H) = I - A^{-1}(A+H) + (A^{-1}HA^{-1})(A+H) = A^{-1}HA^{-1}H,$$

luego $R(H) = A^{-1}HA^{-1}H(A+H)^{-1}$
$\Longrightarrow \|R(H)\| = \|A^{-1}HA^{-1}H(A+H)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|^2\|H\|^2\|(A+H)^{-1}\| \Longrightarrow$

$\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} \leq \|A^{-1}\|^2\|H\|\|(A+H)^{-1}\|.$

Ahora, como la función

$$\begin{aligned} f : \mathcal{L}_{is}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{L}_{is}(F,E) \\ A &\mapsto f(A) = A^{-1} \end{aligned}$$

es continua (debido al Teorema 1.1.20), entonces
$\frac{\|R(H)\|}{\|H\|} \longrightarrow 0$, cuando $H \longrightarrow 0_{\mathcal{L}_{is}(E,F)}$.
Lo cual muestra que $f'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$, para todo $B \in \mathcal{L}_{is}(E,F)$ y $A \in \mathcal{L}_{is}(E,F)$.

□

1.1.22 Definición. Sean X, Y espacios normados con $X \cap Y \neq \emptyset$, definimos

$$\|z\|_{X\cap Y} := \text{máx}\{\|z\|_X, \|z\|_Y\},\ z \in X \cap Y.$$

Note que $(X \cap Y, \|\cdot\|_{X\cap Y})$ es un espacio normado continuamente inmerso en X y Y.

1.1.23 Teorema. (Extensión de un operador via densidad)
Sean E_0, E_1 y E_2 espacios de Banach con $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$.
Si $T : (E_1, \|\cdot\|_{E_0}) \to (E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ es una aplicación lineal continua, entonces existe una única extensión $\widetilde{T} : (E_0, \|\cdot\|_{E_0}) \to (E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ lineal y continua con $\widetilde{T}(x) = T(x)\ \forall x \in E_1$ y $\|\widetilde{T}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_2)} = \|T\|_{\mathcal{L}(E_1,E_2)}$.
En particular,

$$\|T(x)\|_{E_2} \leq c\|x\|_{E_0},\ \forall x \in E_1 \Longrightarrow \|\widetilde{T}(x)\|_{E_2} \leq c\|x\|_{E_0},\ \forall x \in E_0.$$

1.1.24 Lema. Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto , $E_0, E_1, \ldots, E_p$ espacios de Banach, $k \in \mathbb{N}_0$ y sea

$$\begin{aligned} M : E_1 \times \ldots \times E_p &\longrightarrow E_0 \\ (x_1, \ldots, x_p) &\mapsto M(x_1, \ldots, x_p) := x_1 \cdot \ldots \cdot x_p \end{aligned}$$

una multiplicación (es decir, M multilineal con $\|M(x_1, \ldots, x_p)\| \leq \|x_1\|_{E_1} \cdot \ldots \cdot \|x_p\|_{E_p}$). Dado $a_j \in C^k(X, E_j)$ con $j = 1, \ldots, p$, entonces
$[x \mapsto (a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)(x) = a_1(x) \cdot \ldots \cdot a_p(x)] \in C^k(X, E_0)$ y
$\partial^\alpha(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) = \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{N}_0^n \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = \alpha}} \partial^{\alpha_1} a_1 \cdot \ldots \cdot \partial^{\alpha_p} a_p$ para $|\alpha| \leq k$.

Demostración. Sección 2.4 de [5]. □

1.1.25 Lema. Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $k \in \mathbb{N}$ y supongamos que $a \in C^k(X, \mathcal{L}_{is}(E,F))$.
Entonces $a(\cdot)^{-1} \in C^k(X, \mathcal{L}_{is}(F,E))$ y para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $0 < |\alpha| \leq k$ vale que $\partial^\alpha(a^{-1}) = \pm \sum\limits_{p=1}^{|\alpha|} \sum\limits_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{N}_0^n \setminus 0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_p=\alpha}} a^{-1}(\partial^{\alpha_1}a)a^{-1}\dots(\partial^{\alpha_p}a)a^{-1}$.

Demostración. Hagamos inducción sobre $|\alpha|$.
Si $|\alpha| = 1$, entonces $\alpha = e_j := (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, para un $j = 1,\dots,n$ y $\partial^\alpha(a^{-1}) = -a^{-1}(\partial^{e_j}a)a^{-1}$, debido a el lema 1.1.21.
Supongamos que la afirmación es válida para $|\alpha| = k$ y probemos que también es válida para $|\alpha| = k+1$.
Sea $\beta = \alpha + e_j$ con $|\alpha| = k$. Entonces

$$\partial^\beta(a^{-1}) = \partial^{\alpha+e_j}(a^{-1}) = \partial^{e_j}(\partial^\alpha(a^{-1}))$$

$$=\partial^{e_j}\Big(\pm \sum_{p=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{N}_0^n \setminus 0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_p=\alpha}} a^{-1}(\partial^{\alpha_1}a)a^{-1}\dots(\partial^{\alpha_p}a)a^{-1}\Big)$$

$$=\pm \sum_{p=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{N}_0^n \setminus 0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_p=\alpha}} \partial^{e_j}\big(a^{-1}(\partial^{\alpha_1}a)a^{-1}\dots(\partial^{\alpha_p}a)a^{-1}\big)$$

$$= \pm \sum_{p=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{N}_0^n \setminus 0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_p=\alpha}} \sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_l \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta_1+\dots+\beta_l=e_j}} \partial^{\beta_1}a^{-1}\partial^{\beta_2}(\partial^{\alpha_1}a)\partial^{\beta_3}a^{-1}\dots\partial^{\beta_{l-1}}(\partial^{\alpha_p}a)\partial^{\beta_l}a^{-1},$$

con $l \in \{1,\dots,2|\alpha|+1\}$, debido al Lema 1.1.24.
Los $\beta_1,\dots,\beta_l$ son tales que uno de ellos es e_j y los demás son $0_{\mathbb{N}_0^n}$.
Si en un sumando $\beta_k = e_j$ y ∂^{β_k} actúa sobre a^{-1}, entonces ese sumando tendría la forma

$$a^{-1}(\partial^{\alpha_1}a)a^{-1}\dots(\partial^{\alpha_i}a)(-a^{-1}(\partial^{e_j}a)a^{-1})(\partial^{\alpha_{i+1}}a)\dots(\partial^{\alpha_p}a)a^{-1}$$

$$= -a^{-1}[(\partial^{\alpha_1}a)a^{-1}]\dots[(\partial^{\alpha_i}a)a^{-1}][(\partial^{e_j}a)a^{-1}][(\partial^{\alpha_{i+1}}a)a^{-1}]\dots[(\partial^{\alpha_p}a)a^{-1}]$$

Si en un sumando $\beta_k = e_j$ y ∂^{β_k} actúa sobre $\partial^{\alpha_i}a$, entonces ese sumando tendría la forma

$$a^{-1}(\partial^{\alpha_1}a)a^{-1}\dots(\partial^{\beta_k}(\partial^{\alpha_i}a))a^{-1}\dots(\partial^{\alpha_p}a)a^{-1}$$

$$= a^{-1}(\partial^{\alpha_1}a)a^{-1}\dots(\partial^{\beta_k+\alpha_i}a)a^{-1}\dots(\partial^{\alpha_p}a)a^{-1}.$$

En cualquiera de los dos casos se tiene la afirmación.

□

1.1.26 Definición. (Semigrupo) Sea $\{T(t): \ t \geq 0\} \subseteq \mathcal{L}(E)$ una familia de operadores lineales y continuos en E. Dicha familia se denomina un semigrupo en $\mathcal{L}(E)$, si

$$\begin{cases} T(0) = I \ , & I \text{ es la identidad en } E \ . \\ T(t)T(s) = T(t+s) \ , & t, s \geq 0. \end{cases}$$

1.1.27 Definición. (Generador infinitesimal de un semigrupo) Sean $T(t)$ un semigrupo y A un operador lineal definido por

$$D(A) := \{x \in E : \lim_{t \to 0^+} \tfrac{T(t)x - x}{t} \ \text{ existe}\} \quad \text{y}$$
$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \tfrac{T(t)x - x}{t} = \tfrac{\mathrm{d}^+ T(t)x}{dt} \ |_{t=0} \ \text{ para } x \in D(A).$$

A así definido se denomina el generador infinitesimal del semigrupo $T(t)$ con dominio $D(A)$.

1.1.28 Definición. (semigrupos fuertemente continuos) Un semigrupo $T(t)$ se llama fuertemente continuo, si la función

$$\begin{aligned} T : \ \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow E \\ t &\mapsto T(t)(x) \end{aligned}$$

es continua para cada $x \in E$, lo cual es equivalente a decir que
$\lim\limits_{t \to 0^+} T(t)x = x, \ $ para todo $\ x \in E$.
Un semigrupo fuertemente continuo también se denomina semigrupo de clase C_0 o simplemente un C_0-semigrupo.

1.1.29 Lema. Sea $T(t)$ un C_0-semigrupo sobre E. Entonces existen constantes $M \geq 1$ y $w \in \mathbb{R}$, tales que :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M \exp(wt), \ \text{para todo } t \geq 0. \ (*)$$

Demostración. Como la función $\ t \mapsto T(t)(x) \ $ es continua para cada $x \in E$, resulta que el conjunto $\{T(t)(x) : t \in [0,1]\}$ es acotado en E. Así se sigue del principio del acotamiento uniforme que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M, \ \text{para todo } t \in [0,1].$$

Es claro que $M \geq 1$ ya que $T(0) = I$. Sea $w := \ln(M)$, entonces para cada $t > 0$ y $m := m_t \in \mathbb{N}$ con $t \leq m \leq t+1$ se tiene :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} = \|T(m\frac{t}{m})\|_{\mathcal{L}(E)} = \|T(\frac{t}{m})^m\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|T(\frac{t}{m})\|^m_{\mathcal{L}(E)} \leq M^m$$
$$\leq M^{t+1} = M\exp(wt).$$

□

1.1.30 Definición. Sea $T(t)$ un C_0-semigrupo sobre E.
a) Si $w = 0$ en la desigualdad $(*)$, $T(t)$ se denomina acotado.
b) Si $w = 0$ y $M = 1$ en $(*)$, $T(t)$ se denomina un semigrupo de contración.
c) Si $w < 0$ en $(*)$, se dice que el semigrupo $T(t)$ decae exponencialmente .

1.1.31 Definición. (semigrupos analíticos) Un semigrupo $T(t)$ se llama analítico, si la función

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ t & \mapsto & T(t) \end{array}$$

es analítica y si $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x$ para todo $x \in \overline{D(A)}$.

1.2. Los espacios $H(E_1, E_0)$

A continuación sean E_1, E_0 espacios de Banach con $E_1 \hookrightarrow E_0$.

1.2.1 Definición. $H(E_1, E_0)$ es el conjunto de todos los $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ tal que $-A$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico fuertemente continuo {exp(-tA) / $t \geq 0$} en E_0, es decir, en $\mathcal{L}(E_0)$.
A los elementos de $H(E_1, E_0)$ los llamaremos operadores parabólicos en E_0.

1.2.2 Definición. Dados $k \geq 1$ y $w > 0$, diremos que
$A \in H(E_1, E_0, k, w)$, si $w + A \in \mathcal{L}_{is}(E_1, E_0)$ y

$$k^{-1} \leq \frac{\|(\lambda + A)x\|_{E_0}}{|\lambda|\|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}} \leq k \quad \text{para } x \in E_1^*, \ \mathrm{Re}(\lambda) \geq w.$$

1.2.3 Proposición $H(E_1, E_0) = \bigcup\limits_{\substack{w>0 \\ k\geq 1}} H(E_1, E_0, k, w).$

DEMOSTRACIÓN. Teorema 1.2.2 en el capítulo 1 de [3]. □

1.2.4 Proposición Sea $A \in H(E_1, E_0)$, entonces existen constantes M y w tales que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \geq w\} \subset \rho(-A)$ y

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_j)} \leq \frac{M}{(1 + |\lambda|)^{1-j}} \quad \text{para todo } \mathrm{Re}(\lambda) \geq w \text{ y } j = 0, 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $A \in H(E_1, E_0)$, entonces por la Proposición 1.2.3, se sigue que $A \in H(E_1, E_0, k, w)$ para un $w > 0$ y un $k \geq 1$. Luego $w + A \in \mathcal{L}_{is}(E_1, E_0)$ y

$$k^{-1} \leq \frac{\|(\lambda + A)x\|_{E_0}}{|\lambda|\|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}} \leq k \quad \text{para todo } x \in E_1^* \text{ y todo } \mathrm{Re}(\lambda) \geq w. \tag{1.1}$$

Ahora de (1.1) se tiene que:

$$k^{-1}\|x\|_{E_1} \leq k^{-1}(|\lambda|\|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}) \leq \|(\lambda + A)x\|_{E_0}$$

y por tanto

$$k^{-1}\|x\|_{E_1} \leq \|(\lambda + A)x\|_{E_0}; \text{ para todo } x \in E_1 \text{ y todo } \mathrm{Re}(\lambda) \geq w.$$

Sean $y \in E_0$ y $x = (\lambda + A)^{-1}y \in E_1$, entonces $\|(\lambda + A)^{-1}y\|_{E_1} \leq k\|y\|_{E_0}$ para todo $y \in E_0$ y por tanto

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \leq k. \tag{1.2}$$

Por otro lado, $E_1 \hookrightarrow E_0$, luego existe una constante $C > 0$ tal que $\|x\|_{E_0} \leq C\|x\|_{E_1}$ para todo $x \in E_1$. De eso y (1.1) se sigue que:

$$k^{-1}\|x\|_{E_0}(|\lambda| + C^{-1}) \leq k^{-1}(|\lambda|\|x\|_{E_0} + \|x\|_{E_1}) \leq \|(\lambda + A)x\|_{E_0}. \tag{1.3}$$

Haciendo $C_1 := \min\{1, C^{-1}\}$,

$$k^{-1}C_1\|x\|_{E_0}(1 + |\lambda|) \leq k^{-1}\|x\|_{E_0}(|\lambda| + C^{-1}) \leq \|(\lambda + A)x\|_{E_0},$$

o sea que $\|x\|_{E_0}(1+|\lambda|) \leq C_1^{-1}k\|(\lambda+A)x\|_{E_0}$, para todo $x \in E_1$ y $\mathrm{Re}(\lambda) \geq w$. Sea $y \in E_0$, entonces $x = (\lambda + A)^{-1}y \in E_1$ y

$$\|(\lambda + A)^{-1}y\|_{E_0} \leq \frac{C_1^{-1}k\|y\|_{E_0}}{(1 + |\lambda|)} \quad \text{para todo } y \in E_0 \text{ y } \mathrm{Re}(\lambda) \geq w,$$

o equivalentemente (haciendo $M := C_1^{-1}k$)

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq \frac{M}{1+|\lambda|} \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re}(\lambda) \geq w. \tag{1.4}$$

Así se concluye de (1.2) y (1.4) que

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \leq \frac{M_1}{(1+|\lambda|)^{1-j}} \quad \text{para todo } \operatorname{Re}(\lambda) \geq w \text{ y } \; j = 0, 1.$$

□

1.2.5 Observación. Se ha probado en [9], Proposición 2.4.1, que si existen $w \in \mathbb{R}$ y $M > 0$ tales que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq w\} \subset \rho(-A)$ y

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{1+|\lambda|} \quad \text{para todo } \operatorname{Re}(\lambda) \geq w,$$

entonces $-A : D(A) \subset E \to E$ genera un semigrupo analítico sobre E.
Se encuentra también en la pág. 34, que si $-A$ genera un semigrupo analítico sobre E, entonces

$$-A \text{ genera un } C_0 - \text{semigrupo sobre } E \iff D(A) \text{ es denso en } E. \tag{1.5}$$

1.2.6 Teorema. supongamos que $F_1 \overset{d}{\hookrightarrow} F_0$, J es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, $s := \min(J)$ y $(x, A, f) = (x, (A, f)) \in F_0 \times C^\rho(J, H(F_1, F_0) \times F_0)$, para algún $\rho \in (0, 1)$. Entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + A(t)u = f(t)\ , & t \in J \setminus \{s\}, \\ u(s) \ = \ x & \end{cases}$$

posee una única solución $u(\cdot) := u(\cdot, s, x, A, f)$ y

$$u \in C^\rho(J \setminus \{s\}, F_1) \cap C^{\rho+1}(J \setminus \{s\}, F_0).$$

Demostración. Teorema 1.2.1 en el capítulo 2 de [3]. □

Capítulo 2

Espacios de símbolos y operadores pseudodiferenciales

En este capítulo definimos una clase de simbolos y sus operadores pseudodiferenciales asociados. También enunciamos un teorema sin demostración que establece la continuidad de estos operadores sobre espacios de Besov Banach valuados.

2.1. Espacio de símbolos

2.1.1 Definición. (El espacio de Símbolos $S^m(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E,F))$)
Sean E, F espacios de Banach , $m \in \mathbb{R}$. Definimos el **espacio de símbolos** $S^m(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E,F))$, como el conjunto de funciones

$$a : \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathcal{L}(E,F)$$

tales que $a \in C^{n+1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}, \mathcal{L}(E,F))$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq n+1$ existe una constante $C_\alpha > 0$ con la propiedad de que

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\xi)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}.$$

La menor de estas constantes C_α define una norma en el espacio $S^m(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E,F))$, esto es,

$$\|a\|_{S^m(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E,F))} := \max_{|\alpha| \leq n+1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}} \langle \xi \rangle^{|\alpha|-m} \|\partial_\xi^\alpha a(\xi)\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

2.1.2 Lema. Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$, entonces existen constantes positivas C_1, C_2, tales que

$$C_1(1+|\xi|) \leq \langle\xi\rangle \leq C_2(1+|\xi|)$$

Demostración. Sea $\xi \in \mathbb{R}^n$, entonces $1 \leq 1+|\xi|^2$ y $|\xi|^2 \leq 1+|\xi|^2$. Dado que la función $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ es creciente se sigue que

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{1+|\xi|^2} \ \text{ y } \ \sqrt{|\xi|^2} \leq \sqrt{1+|\xi|^2},$$

en consecuencia

$$\sqrt{1} + \sqrt{|\xi|^2} \leq 2\sqrt{1+|\xi|^2},$$

y así

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|) \leq \langle\xi\rangle.$$

Por otro lado, $1 \leq (1+|\xi|)^2$ y $|\xi|^2 \leq (1+|\xi|)^2$, luego $1+|\xi|^2 \leq 2(1+|\xi|)^2$. y dado que la función $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ es creciente se sigue que

$$\sqrt{1+|\xi|^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{(1+|\xi|)^2}$$

y así

$$\langle\xi\rangle \leq \sqrt{2}(1+|\xi|).$$

□

2.1.3 Observación.
Si $\alpha \neq 0_{\mathbb{N}_0^n}$,

$$\partial^\alpha(|\xi|^2 + A) = \begin{cases} 2\xi_i \ , & si \ \ \alpha = e_i, \\ 2 \ , & si \ \ |\alpha| = 2 \ y \ \alpha = 2e_i, \\ 0 \ , & si \ \ |\alpha| = 2 \ y \ \alpha = e_i + e_j \ con \ i \neq j, \\ 0 \ , & si \ \ |\alpha| \geq 3. \end{cases}$$

En consecuencia, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{0\}$ se tiene

$$\partial^\alpha(|\xi|^2 + A) = \beta(\xi)I, \ con \ \ \beta(\xi) = \partial^\alpha(|\xi|^2).$$

2.1.4 Proposición Sea $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$, entonces

$$\xi \mapsto (|\xi|^2 + A) \ \in \ S^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_1, E_0)).$$

Demostración.
Si $|\alpha|=0$, entonces
$\|\partial^\alpha(|\xi|^2+A)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}=\|\ |\xi|^2+A\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}\leq|\xi|^2+\|A\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}$
$\leq(1+|\xi|^2)C=C\langle\xi\rangle^{2-|\alpha|};\ \ C=\text{máx}\{1,\|A\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}\}$.
Si $|\alpha|\geq 1$, utilizamos la Observación 2.1.3 de la siguiente forma:
si $|\alpha|=1$, entonces
$\|\partial^\alpha(|\xi|^2+A)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}=|2\xi_i|=2|\xi_i|=2(|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}\leq 2(1+|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
$\leq 2(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}=2\langle\xi\rangle=2\langle\xi\rangle^{2-|\alpha|}$.
Si $|\alpha|=2$ (segundo caso en la Observación 2.1.3) , entonces
$\|\partial^\alpha(|\xi|^2+A)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}=2\leq 2\langle\xi\rangle^0=2\langle\xi\rangle^{2-|\alpha|}$.
Si $|\alpha|=2$ (tercer caso en la Observación 2.1.3) , entonces
$\|\partial^\alpha(|\xi|^2+A)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}=0\leq\langle\xi\rangle^0=\langle\xi\rangle^{2-|\alpha|}$.
Si $|\alpha|\geq 3$, la prueba es análoga a la anterior.
De lo anterior y el Lema 2.1.2, se concluye que $(|\xi|^2+A)\in S^2(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(E_1,E_0))$.
$\square$

2.2. Operadores pseudodiferenciales

2.2.1 Definición. (Operador pseudodiferencial) Sea $a\in S^m(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(E,F))$. Definimos el **operador pseudo-diferencial** asociado al símbolo a, denotado por $a(D)$, como

$$[a(D)u](x):=\mathfrak{F}^{-1}(a\mathfrak{F}u)(x):=\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\cdot\xi}a(\xi)\hat{u}(\xi)d\!\!{}^-\xi,$$

$u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,E)$, donde $d\!\!{}^-\xi=(2\pi)^{-n}d\xi$ y $\hat{u}$ es la transformada de Fourier de u, denotando $\mathfrak{F}$ la transformada de fourier y $\mathfrak{F}^{-1}$ su transformada inversa.
Via dualidad se extiende este operador a

$$a(D):\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,E)\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,E),$$

si a es un símbolo infinitamente diferenciable. Esto es, para $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,E)$, $(a(D)u)(\varphi):=u(a(-\cdot)(D)\varphi)\ \ \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.2.2 Ejemplo. Para el polinomio

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \xi^\alpha,$$

$D_{x_i} = -i\partial_{x_i}$ y $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, E)$ se cumple que

$$p(D)u = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D_x^\alpha u.$$

En particular, si $a(\xi) = (|\xi|^2 + A)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$a(D) = -\Delta + A = -\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) + A.$$

2.2.3 Teorema. Sean $s \in \mathbb{R}$, $p,q \in [1,\infty]$, $\mathcal{B} \in \{\mathrm{B},\mathrm{b}\}$ y $m \in \mathbb{R}$. Entonces

$$[a \to a(D)] \in \mathcal{L}(S^m(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E,F)), \mathcal{L}(\mathcal{B}^{s+m}_{p,q}(\mathbb{R}^n, E), \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, F))).$$

Demostración. Ver [4], Theorem 6.2. $\square$

Capítulo 3

Resultados principales

En este capítulo probaremos que si A es un operador parabólico en E_0, entonces $-\Delta + A$ es un operador parabólico en $buc^s(\mathbb{R}^n, E_0)$.
Luego en base a esto y algunos resultados de los capítulos anteriores se prueba que el problema $(P)_{f,g,h,u_0}$ posee una única solución.

3.1. Propiedades del operador pseudodiferencial $(\lambda - \Delta + A)^{-1}$

A continuación $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$.

3.1.1 Teorema. Sea $A \in H(E_1, E_0)$ con

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_j)} \leq \frac{M}{(1+|\lambda|)^{1-j}} \quad \text{para todo } \operatorname{Re}(\lambda) \geq w \text{ y } j = 0, 1,$$

como en la Proposición 1.2.4 y sea $a_\lambda^{-1}(\xi) := (\lambda + |\xi|^2 + A)^{-1}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, para cada $\operatorname{Re}(\lambda) \geq w$. Entonces

$$a_\lambda^{-1}(D) = (\lambda - \Delta + A)^{-1} \in \mathcal{L}_{is}(\mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, E_0), \mathcal{B}^{s+2}_{p,q}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap \mathcal{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n, E_1)),$$

para cada $\operatorname{Re}(\lambda) \geq w$, $\mathcal{B} \in \{B, b\}$, $s \in \mathbb{R}$ y $p,q \in [1, \infty]$.

Demostración. Sea $A \in H(E_1, E_0)$, entonces por la Proposición 1.2.4 existen constantes M y w tales que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) \geq w\} \subset \rho(-A)$ y

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_j)} \leq \frac{M}{(1+|\lambda|)^{1-j}} \quad \text{para todo } \operatorname{Re}(\lambda) \geq w \text{ y } j = 0, 1.$$

Note que $\mathrm{Re}(\lambda+|\xi|^2)\geq w$ para todo $\mathrm{Re}(\lambda)\geq w$ y $\xi\in\mathbb{R}^n$, luego se sigue de lo anterior que

$$\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\leq\frac{M_1}{1+|\lambda+|\xi|^2|},\tag{3.1}$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ y todo λ con $\mathrm{Re}(\lambda)\geq w$.
Ahora,

$$\begin{aligned}|\lambda+|\xi|^2|^2&=(|\xi|^2+|\lambda|\cos(\theta))^2+|\lambda|^2\sin^2(\theta)\\&=|\xi|^4+2|\xi|^2|\lambda|\cos(\theta)+|\lambda|^2,\end{aligned}$$

con $\theta=\arg(\lambda)$. Como $\mathrm{Re}(\lambda)\geq w$ y $w>0$, entonces $|\arg(\lambda)|\leq\frac{\pi}{2}$ y por lo tanto $\cos(\theta)\geq 0$. Luego, se tiene

$$|\lambda+|\xi|^2|\geq|\xi|^2\quad\text{y}\quad|\lambda+|\xi|^2|\geq|\lambda|.$$

Por tanto

$$\frac{1}{1+|\lambda+|\xi|^2|}\leq\frac{1}{1+|\xi|^2}\quad\text{y}\quad\frac{1}{1+|\lambda+|\xi|^2|}\leq\frac{1}{1+|\lambda|},$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ y $\mathrm{Re}\geq w$.
De las desigualdades anteriores y (3.1) se tiene que:

$$\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\leq\frac{M}{1+|\xi|^2}=M\langle\xi\rangle^{-2}\tag{3.2}$$

y

$$\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\leq\frac{M}{1+|\lambda|},\tag{3.3}$$

para todo $\xi\in\mathbb{R}^n$ y todo λ con $\mathrm{Re}(\lambda)\geq w$.

Además

$$\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)}\leq\frac{M}{(1+|\lambda+|\xi|^2)^{1-1}}=M,\tag{3.4}$$

para todo λ con $\mathrm{Re}(\lambda)\geq w$ y todo $\xi\in\mathbb{R}^n$.
Ahora mostremos que:

$$a_\lambda^{-1}(\cdot)\in S^{-2}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(E_0))\text{ con }\|a_\lambda^{-1}(\cdot)\|_{S^{-2}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(E_0))}\leq M_1\tag{3.5}$$

y

$$a_\lambda^{-1}(\cdot)\in S^{0}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(E_0,E_1))\text{ con }\|a_\lambda^{-1}(\cdot)\|_{S^{0}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(E_0,E_1))}\leq M_1\tag{3.6}$$

para todo $\mathrm{Re}(\lambda) \geq w$, donde la constante M_1 no dependen de λ.

Prueba de (3.5):

$$\partial^{e_j}(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1} = -(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}(\partial^{e_j}(|\xi|^2+\lambda+A))(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1} \tag{3.7}$$

$$= -(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}(2\xi_j)(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}, \tag{3.8}$$

debido al Lema 1.1.21 y el lema 1.1.25 con $|\alpha| \leq n+1$.
Ahora, la derivada parcial
$\partial^\alpha(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}$ esta dada por:

$$\pm\sum_{p=1}^{|\alpha|}\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\mathbb{N}_0^n\smallsetminus 0\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_p=\alpha}}(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}(\partial^{\alpha_1}(|\xi|^2+\lambda+A))(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}$$

$$\ldots(\partial^{\alpha_p}(|\xi|^2+\lambda+A))(\xi|^2+\lambda+A)^{-1}.$$

Si $|\alpha| = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} &= \|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\\ &\leq \frac{M}{1+|\xi|^2} \quad (\text{por } (3.2))\\ &= \frac{M}{\langle\xi\rangle^2} \leq \frac{M_1}{(1+|\xi|)^2} \text{ (debido al Lema 2.1.2)}\\ &= M_1(1+|\xi|)^{-2-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Ahora, sea $1 \leq |\alpha| \leq n+1$, entonces
$\|\partial^\alpha(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq$

$$\sum_{p=1}^{|\alpha|}\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\mathbb{N}_0^n\smallsetminus 0\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_p=\alpha}}\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}(\partial^{\alpha_1}(|\xi|^2+\lambda+A))(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}$$

$$\ldots(\partial^{\alpha_p}(|\xi|^2+\lambda+A)(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}.$$

Aplicando la Observación 1.1.19 y la Observación 2.1.3 se tiene que

$\|\partial^\alpha(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq$

$$\sum_{p=1}^{|\alpha|}\sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\mathbb{N}_0^n\smallsetminus 0\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_p=\alpha}}\Big\{\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\|(\partial^{\alpha_1}(|\xi|^2+\lambda+A))\|_{\mathcal{L}(E_0)}$$

$$\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\ldots\|(\partial^{\alpha_p}(|\xi|^2+\lambda+A))\|_{\mathcal{L}(E_0)}\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\Big\}.$$

Utilizando (3.2) y la Proposición 2.1.4, se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\|\partial^\alpha(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
&\leq \sum_{p=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\mathbb{N}_0^n\setminus 0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_p=\alpha}} M\langle\xi\rangle^{-2}C_1\langle\xi\rangle^{2-|\alpha_1|}M\langle\xi\rangle^{-2}\ldots C_p\langle\xi\rangle^{2-|\alpha_p|}M\langle\xi\rangle^{-2} \\
&= \tilde{M}\langle\xi\rangle^{-2-|\alpha|} = \frac{\tilde{M}}{\langle\xi\rangle^{2+|\alpha|}} \\
&\leq \frac{M_1}{(1+|\xi|)^{2+|\alpha|}} \quad \text{(debido al Lema 2.1.2)} \\
&= M_1(1+|\xi|)^{-2-|\alpha|},
\end{aligned}$$

lo cual prueba (3.5).

Prueba de (3.6): Si $|\alpha| = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} &= \|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \\
&\leq M \text{ (debido a (3.4))} \\
&= M_1(1+|\xi|)^{0-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Sea ahora $1 \leq |\alpha| \leq n+1$, entonces se obtiene en forma análoga como en la prueba de (3.5) que

$$\begin{aligned}
&\|\partial^\alpha(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \leq \\
&\sum_{p=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\mathbb{N}_0^n\setminus 0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_p=\alpha}} \Big\{\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)}\|(\partial^{\alpha_1}(|\xi|^2+\lambda+A))\|_{\mathcal{L}(E_0)} \\
&\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\ldots\|(\partial^{\alpha_p}(|\xi|^2+\lambda+A))\|_{\mathcal{L}(E_0)}\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\Big\}.
\end{aligned}$$

De (3.2) y (3.4) resulta que

$$\begin{aligned}
&\|\partial^\alpha(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \\
&\leq \sum_{p=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\mathbb{N}_0^n\setminus 0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_p=\alpha}} MC_1\langle\xi\rangle^{2-|\alpha_1|}M\langle\xi\rangle^{-2}\ldots C_p\langle\xi\rangle^{2-|\alpha_p|}M\langle\xi\rangle^{-2} \\
&= \tilde{M}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \leq \frac{M_1}{(1+|\xi|)^{|\alpha|}} \quad \text{(debido al Lema 2.1.2)},
\end{aligned}$$

lo cual prueba la afirmación (3.6).

De (3.5), (3.6) y el Teorema 2.2.3 se sigue que

$$a_\lambda^{-1}(D) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{s+2-2}(\mathbb{R}^n, E_0), \mathcal{B}_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, E_0)) \text{ (con } s = s+2 \text{ y } m = -2) \tag{3.9}$$

y

$$a_\lambda^{-1}(D) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_0), \mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_1)) \text{ (con } m = 0) \tag{3.10}$$

para todo $\mathrm{Re}(\lambda) \geq w$, $\mathcal{B} \in \{B, b\}$, $s \in \mathbb{R}$ y $p,q \in [1, \infty]$. De lo anterior se infiere que

$$a_\lambda^{-1}(D) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_0), \mathcal{B}_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap \mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_1)) \tag{3.11}$$

para todo $\mathrm{Re}(\lambda) \geq w$, $\mathcal{B} \in \{B, b\}$, $s \in \mathbb{R}$ y $p,q \in [1, \infty]$.
Note que si $a_\lambda(\xi) = (\lambda + |\xi|^2 + A)^{-1}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, para cada $\mathrm{Re}(\lambda) \geq w$, entonces

$$a_\lambda(D) a_\lambda^{-1}(D) u = \mathfrak{F}^{-1}(a_\lambda \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}(a_\lambda^{-1} \mathfrak{F} u)) = Id_{\mathcal{B}_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap \mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_1)} u \tag{3.12}$$

para todo $u \in \mathcal{B}_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap \mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_1)$ y

$$a_\lambda^{-1}(D) a_\lambda(D) u = \mathfrak{F}^{-1}(a_\lambda^{-1} \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}(a_\lambda \mathfrak{F} u)) = Id_{\mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_0)} u \tag{3.13}$$

para todo $u \in \mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_0)$. De donde se sigue

$$a_\lambda^{-1}(D) \in \mathcal{L}_{is}(\mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_0), \mathcal{B}_{p,q}^{s+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap \mathcal{B}_{p,q}^{s}(\mathbb{R}^n, E_1)) \tag{3.14}$$

para todo $\mathrm{Re}(\lambda) \geq w$, $\mathcal{B} \in \{B, b\}$, $s \in \mathbb{R}$ y $p,q \in [1, \infty]$.

□

3.1.2 Teorema. Sea $A \in H(E_1, E_0)$. Entonces

$$-\Delta + A \in H(buc^{s+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap buc^s(\mathbb{R}^n, E_1), buc^s(\mathbb{R}^n, E_0))$$

para cualquier $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

Demostración. Probemos inicialmente que

$$buc^{s+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap buc^s(\mathbb{R}^n, E_1) \overset{d}{\hookrightarrow} buc^s(\mathbb{R}^n, E_0). \tag{3.15}$$

De las inmersiones densas y continuas (ver [4], Sec. 5)

$$b_{\infty,\infty}^{s+2}(\mathbb{R}^n, E_0) \overset{d}{\hookrightarrow} b_{\infty,\infty}^{s}(\mathbb{R}^n, E_0), \tag{3.16}$$

$$b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_1) \overset{d}{\hookrightarrow} b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0), \tag{3.17}$$

se obtiene que

$$b^{s+2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_1) \overset{d}{\hookrightarrow} b^{s+2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0) \overset{d}{\hookrightarrow} b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0).$$

Es decir,

$$b^{s+2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_1) \overset{d}{\hookrightarrow} b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0). \tag{3.18}$$

Sea $u \in b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0)$, entonces por (3.18) existe una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq b^{s+2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_1)$ tal que $u_k \longrightarrow u$, cuando $k \to \infty$, en la norma $\|\cdot\|_{b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n,E_0)}$. Pero, por (3.16) y (3.17) sabemos que

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq b^{s+2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0) \ \cap \ b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_1).$$

En consecuencia, $b^{s+2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_1)$ es denso en $b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0)$. Ya sabemos del teorema anterior que

$$(\lambda - \Delta + A)^{-1} \in \mathcal{L}_{is}(b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0), b^{s+2}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_0) \cap b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, E_1))$$

para todo $\mathrm{Re}(\lambda) \geq w$. Ahora mostraremos (en forma similar a lo realizado en la prueba del Teorema 3.1.1) que

$$(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1} \in S^0(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E_0)) \text{ con } \|(|\cdot|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{S^0(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(E_0))} \leq \frac{M_1}{1+|\lambda|}, \tag{3.19}$$

para todo $\mathrm{Re}(\lambda) \geq w$, donde la constante M_1 no dependen de λ.
En efecto:

$$\|\partial^\alpha(|\xi|^2 + \lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq$$

$$\sum_{p=1}^{|\alpha|} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{N}_0^n \setminus 0 \\ \alpha_1+\ldots+\alpha_p=\alpha}} \Big\{ \|(|\xi|^2 + \lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \|\partial^{\alpha_1}(|\xi|^2 + \lambda + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}$$

$$\|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \ldots \|\partial^{\alpha_p}(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \|(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \Big\}.$$

Ahora aplicando la Proposición 2.1.4 y (3.3) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\|\partial^\alpha(|\xi|^2+\lambda+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)}\\
&\le \sum_{p=1}^{|\alpha|}\sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{N}_0^n\setminus 0\\ \alpha_1+\dots+\alpha_p=\alpha}}\left(\frac{M}{1+|\lambda|}\right)C_1\langle\xi\rangle^{2-|\alpha_1|}M\langle\xi\rangle^{-2}\dots C_p\langle\xi\rangle^{2-|\alpha_p|}M\langle\xi\rangle^{-2}\\
&=\frac{\tilde{M}}{1+|\lambda|}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\\
&\le \frac{M_1}{(1+|\lambda|)(1+|\xi|)^{|\alpha|}},
\end{aligned}$$

debido al Lema 2.1.2, donde la constante M_1 no depende de λ. Esto muestra (3.19).

Ahora, utilizando (3.19) y el Teorema 2.2.3 se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|(\lambda-\Delta+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n,E_0))} &= \|(\lambda+|\cdot|^2+A)^{-1}(D)\|_{\mathcal{L}(b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n,E_0))}\\
&\le C\|(\lambda+|\cdot|^2+A)^{-1}\|_{S^0(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(E_0))}\\
&\le \frac{M_2}{1+|\lambda|}
\end{aligned}$$

para todo $\mathrm{Re}(\lambda)\ge w$, donde la constante $M_2:=CM_1$ no dependen de λ. De eso, de (3.15) y la Observación 1.2.5 se concluye que $-\Delta+A$ genera un semigrupo analítico y fuertemente continuo sobre $b^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n,E_0)$, esto es $-\Delta+A\in H(buc^{s+2}(\mathbb{R}^n,E_0)\ \cap\ buc^s(\mathbb{R}^n,E_1),\ buc^s(\mathbb{R}^n,E_0))$.

□

3.2. Aplicación a un problema parabólico en una región cilíndrica no acotada.

En esta sección, J denota el intervalo cerrado $[0,T]$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto y acotado con frontera suave $\partial\Omega$, γ_0 y γ_1 denotan los operadores traza de orden cero y orden uno, respectivamente, dados en el Teorema 1.1.14.

3.2.1 Teorema. Sean $s \in \mathbb{R}^+ \smallsetminus \mathbb{N}$, $\rho \in (0,1)$ y supongamos que

$$f \in C^\rho(J, buc^s(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega))),$$

$$\begin{aligned}(g,h) \in C^{1+\rho}(J, buc^s(\mathbb{R}^n, W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega))) \\ \cap \quad C^\rho(J, buc^{s+2}(\mathbb{R}^n, W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)))\end{aligned}$$

y

$$u_0 \in buc^s(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega)).$$

Entonces existe una única solución

$$\begin{aligned}u \in \; & C^\rho(J \smallsetminus \{0\}, buc^{s+2}(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega)) \cap buc^s(\mathbb{R}^n, W_p^2(\Omega))) \\ & \cap \; C^{\rho+1}(J \smallsetminus \{0\}, buc^s(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega)))\end{aligned}$$

del problema

$$(P)_{f,g,h,u_0} \begin{cases} u_t(t,x,y) - \Delta_x u(t,x,y) + \mathcal{A}(y,\partial_y)u(t,x,y) = f(t,x,y), \\ \qquad (t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \Omega, \\ \gamma_0 u(t,x,\cdot) \;=\; g(t,x,\cdot), \\ \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \gamma_1 u(t,x,\cdot) \;=\; h(t,x,\cdot), \\ \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \text{ sobre } \partial\Omega, \\ u(0,x,y) \;=\; u_0(x,y), \\ \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \Omega, \end{cases}$$

donde

$$\mathcal{A}(y,\partial_y)u := \mathrm{div}_y[\Lambda(y)\nabla_y u + b(y)u] + (c(y)\cdot\nabla_y u) + d(y)u,$$

con $\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $b : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $c : \Omega \to \mathbb{R}^m$ y $d : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones suaves y Λ uniformemente elíptica en Ω, esto es, existe $\beta > 0$ tal que para todo $y \in \Omega$ se tiene

$$\Lambda(y)\eta \cdot \eta \geq \beta|\eta|^2, \quad \forall\, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

Demostración. Definamos $D(A)$, dominio de A, y A de la siguiente manera:

$$D(A) := W^2_{p,\gamma_\partial}(\Omega) := \{u \in W^2_p(\Omega) : \gamma_0 u = 0 \ y\ \gamma_1 u = 0\},$$
$$Au := \mathcal{A}(y, \partial_y)u, \text{ para todo } u \in D(A).$$

Sean $F_1 := buc^{s+2}(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega)) \cap buc^s(\mathbb{R}^n, W^2_p(\Omega))$, $F_0 := buc^s(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega))$, $E_1 := W^2_{p,\gamma_\partial}(\Omega)$ y $E_0 := L^p(\Omega)$.

En [2] se probó que $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$ y por lo tanto, en virtud del Teorema 3.1.2, $F_1 \overset{d}{\hookrightarrow} F_0$.

También fue probado en [2] que $A \in H(F_1, F_0)$. En consecuencia, resulta del Teorema 3.1.2 y las hipótesis dadas que $[t \mapsto -\Delta + \mathcal{A}] \in C^\rho(J, H(F_1, F_0))$ y $f \in C^\rho(J, buc^s(\mathbb{R}^n, L^p(\Omega)))$. Luego, el Teorema 1.2.6 implica que el problema $(P)_{f,0,0,u_0}$ posee una única solución $u \in C^\rho(J \setminus \{0\}, F_1) \cap C^{\rho+1}(J \setminus \{0\}, F_0)$. Como por hipótesis

$$\begin{aligned}(g,h) \in C^{1+\rho}(J, buc^s(\mathbb{R}^n, W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega))) \\ \cap \quad C^\rho(J, buc^{s+2}(\mathbb{R}^n, W_p^{2-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) \times W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega))),\end{aligned}$$

el teorema de la traza (Teorema 1.1.14) implica que para cada $t \in J$ y $x \in \mathbb{R}^n$, existe $w(t,x,\cdot) \in W^2_p(\Omega)$ tal que $\gamma_\partial(w(t,x,\cdot)) = (\gamma_0(w(t,x,\cdot)), \gamma_1(w(t,x,\cdot))) = (g(t,x,\cdot), h(t,x,\cdot))$.

Sea $\widetilde{f}(t,x,y) := f(t,x,y) - [w_t(t,x,y) - \Delta_x w(t,x,y) + \mathcal{A}(y,\partial_y)w(t,x,y)]$, $(t,x,y) \in J \times \mathbb{R}^n \times \Omega$. Entonces $\widetilde{f} \in C^\rho(J, F_0)$. Luego, por la primera parte se sigue que el problema $(P)_{\widetilde{f},0,0,u_0-w(0)}$, es decir,

$$(P)_{\widetilde{f},0,0,u_0-w(0)} \begin{cases} v_t(t,x,y) - \Delta_x v(t,x,y) + \mathcal{A}(y,\partial_y)v(t,x,y) = \widetilde{f}(t,x,y), \\ \qquad (t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \Omega, \\ \gamma_0 v(t,x,\cdot) \ = \ 0, \\ \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \gamma_1 v(t,x,\cdot) \ = \ 0, \\ \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \text{ sobre } \partial\Omega, \\ v(0,x,y) \ = \ u_0(x,y) - w(0,x,y), \\ \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \Omega, \end{cases}$$

posee una única solución $v \in C^\rho(J \setminus \{0\}, F_1) \cap C^{\rho+1}(J \setminus \{0\}, F_0)$.
Ahora definamos $u := v+w$, siendo v la solución del problema $(P)_{\widetilde{f},0,0,u_0-w(0)}$.
Note que u asi definido es solución del problema $(P)_{f,g,h,u_0}$, ya que
$u_t - \Delta u + \mathcal{A}u = v_t + w_t - \Delta v - \Delta w + \mathcal{A}v + \mathcal{A}w = \widetilde{f} + (w_t - \Delta w + \mathcal{A}w) = f$, $\gamma_0(u) = \gamma_0(v) + \gamma_0(w) = 0 + g = g$, $\gamma_1(u) = \gamma_1(v) + \gamma_1(w) = 0 + h = h$ y $u(0) = v(0) + w(0) = u_0 - w(0) + w(0) = u_0$.

Ahora supongamos que $\widetilde{u}$ es otra solución de $(P)_{f,g,h,u_0}$ y sea $\widetilde{v} := \widetilde{u} - w$. Entonces $\widetilde{v}$ es solución del problema $(P)_{\widetilde{f},0,0,u_0-w(0)}$, ya que

$$\widetilde{v}_t - \Delta\widetilde{v} + \mathcal{A}\widetilde{v} = \widetilde{u}_t - w_t - \Delta\widetilde{u} + \Delta w + \mathcal{A}\widetilde{u} - \mathcal{A}w = f - (w_t - \Delta w + \mathcal{A}w) = \widetilde{f},$$

$$\gamma_0(\widetilde{v}) = \gamma_0(\widetilde{u}) - \gamma_0(w) = g - g = 0,$$

$$\gamma_1(\widetilde{v}) = \gamma_1(\widetilde{u}) - \gamma_1(w) = h - h = 0$$

y

$$\widetilde{v}(0) = \widetilde{u}(0) - w(0) = u_0 - w(0),$$

y como este problema tiene una única solución, entonces $\widetilde{v} = v$. De esto se sigue que $\widetilde{u} = u$.

$\square$

Bibliografía

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).

[2] H. Amann, Nonhomogeneous Linear and Quasilinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems, Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Teubner-Texte Zur Math. Vol. 133,9-126 (1993).

[3] H. Amann, Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Birkhäuser, Basel (1995).

[4] H. Amann, Operator-valued fourier multipliers, vector-valued Besov-Spaces, and applications, Math. Nachr. 186, 5-56 (1997).

[5] H. Amann, Vector-valued distributions and fourier multipliers (2003). http://user.math.uzh.ch/amann /books.html.

[6] M. Dobrowolski, Angewandte funktional-analysis, Ed. Springer, Berlin (2006).

[7] P. Guidotti, Elliptic and parabolic problems in unbounded domains, Math. Nachr. 272 (2004), 32-45.

[8] P. Grisvard, Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman advanced publishing program, Boston (1985).

[9] A. Lunardi, Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems, Birkhäuser (1995).

[10] G. Schleinkofer, Introduction to pseudodiferential operators, Universidad nacional de Colombia (1996).